第４講　ベクトル，数列

1

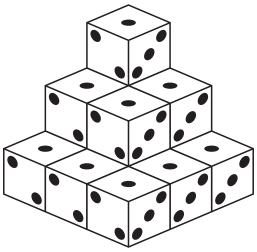
［1］　自然数 $2k-1$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が $2k-1$ 個ずつ続く次のような数列がある．

$$1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 9,\ \cdots\cdots$$

(1)　m を自然数とする．$2m+1$ が初めて現れるのは第何項かを m で表しなさい．

(2)　初項から第 100 項までの和を求めなさい．

［2］　一辺の長さが 1 のサイコロを，上から一段目には 1 個，二段目には 4 個，三段目には 9 個，一般に n 段目には n^2 個を縦幅と横幅が同じで，角をそろえて順に積み上げる．これを n 段のサイコロピラミッドと呼ぶことにする．図は三段のサイコロピラミッドである．



このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　n 段のサイコロピラミッドを積み上げるために使用されたサイコロの数を n を用いて表せ．

(2)　n 段のサイコロピラミッドの表面積を n を用いて表せ．ただし，表面積にサイコロピラミッドの底面を含むものとする．

(3)　図に示す向きで，すべてのサイコロを同じ方向に向けて積むものとする．n 段のサイコロピラミッドの表面のサイコロの目の数の総和を n を用いて表せ．ただし，サイコロの向かい合う面の目の和はすべて 7 とし，サイコロピラミッドの底面も数えるものとする．

2 平面上の5点O，A，B，C，Pに対して，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とする．これらのベクトルは，以下の条件をすべて満たしている．

・$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$　・$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直である．　・$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ である．

・$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ である．　・$\vec{p}=\vec{a}+\vec{c}$

また，$\angle OBP=\theta$ $(0<\theta<\pi)$ とする．このとき，次の問(1)〜(5)に答えよ．

(1) $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ となるような実数 x，y の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\overrightarrow{BO}$ と $\overrightarrow{BP}$ の内積を求めよ．

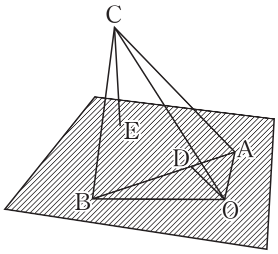
(3) $\cos^2\theta$ の値を求めよ．

(4) $\cos 2\theta$ の値を求めよ．

(5) θ の値を求めよ．

3　次の空欄を埋めよ．

四面体 OABC において，OA＝2, OB＝3, AB＝4, OC＝5, ∠AOC＝60°，∠BOC＝60°とする．さらに，頂点 O から辺 AB へ下ろした垂線と AB との交点を D，頂点 C から面 OAB を含む平面へ下ろした垂線とその平面との交点を E とする．



(1)　$\overrightarrow{OD}=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キク}}\overrightarrow{OB}$ である．

(2)　$\overrightarrow{CE}=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ である．

(3)　四面体 OABC の体積は $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\sqrt{\boxed{タ}}$ である．

第4講　ベクトル，数列

1 ［1］自然数 $2k-1$ が $2k-1$ 個ずつ属する群を第 k 群とする．

(1) $2k-1=2m+1$ より $k=m+1$

よって，$2m+1$ は第 $m+1$ 群に属し，$2m+1$ が初めて現れるのは第 $m+1$ 群の最初の項．

初項から第 m 群までに含まれる項の数は

$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=2\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-1\cdot m=m^2$ である．

$2m+1$ が初めて現れるのは第 m^2+1 項

(2) $100=10^2$ より，第100項は第10群の最後の項である．

第 k 群に属する項の総和は $(2k-1)\times(2k-1)=4k^2-4k+1$ であるから，

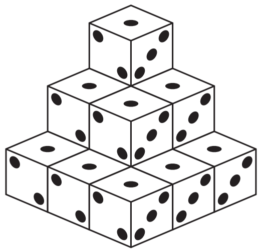
求める和は $\sum_{k=1}^{10}(4k^2-4k+1)=4\cdot\frac{1}{6}\cdot10\cdot11\cdot21-4\cdot\frac{1}{2}\cdot10\cdot11+1\cdot10=1330$

［2］(1) k 段目に使用するサイコロは k^2 個

よって，n 段のサイコロピラミッドを積み上げるために使用されたサイコロの数は

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(2) サイコロの1つの面の面積は1である．また，すべてのサイコロを，図のように同じ方向に向けるとする．



1の目の面の面積，6の目の面の面積はともに n^2 である．

また，k 段目における2，3，4，5の目の面の面積は

$k\times4=4k$ である．

よって，サイコロピラミッドの表面積は

$n^2\times2+\sum_{k=1}^{n}4k=2n^2+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=4n^2+2n$

(3) サイコロピラミッドを真上から見ると，1の目は n^2 個あるので，その和は

$1\times n^2=n^2$

サイコロピラミッドの底面を見ると，6の目は n^2 個あるので，その和は

$6\times n^2=6n^2$

2，3，4，5の目はそれぞれ $1+2+3+\cdots\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ 個ずつあるので，その和は $(2+3+4+5)\times\frac{1}{2}n(n+1)=7n(n+1)$

よって求める目の和は $n^2+7n(n+1)+6n^2=14n^2+7n$

2 (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直より $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角は $\frac{\pi}{6}$ より $\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\frac{\pi}{6}=2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ より $\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\dfrac{\pi}{3}=2\times2\times\dfrac{1}{2}=2$

$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと

$\vec{a}\cdot\vec{c}=2\sqrt{3}$ より $\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=2\sqrt{3}$　　$x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}$

よって $x\cdot2^2=2\sqrt{3}$ より　$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=2$ より $\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=2$　　$xa\cdot b+y|\vec{b}|^2=2$

よって $y\cdot2^2=2$ より $y=\dfrac{1}{2}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{p}-\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=-\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=2^2-2=2$

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|=|-\vec{b}|=2$

$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2=|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=2^2+2^2+2^2-2\times2+2\times2\sqrt{3}=8+4\sqrt{3}$

$=8+2\sqrt{12}=\left(\sqrt{6}\right)^2+2\sqrt{6}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|>0$ より $|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BO}}||\overrightarrow{\mathrm{BP}}|}=\dfrac{2}{2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

したがって，$\cos^2\theta=\dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{4^2}=\dfrac{8-4\sqrt{3}}{4^2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

(4)　$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\cdot\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}-1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5)　(3)より $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ であり，$0<\cos\theta<1$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　よって $0<2\theta<\pi$

したがって(4)より $2\theta=\dfrac{5}{6}\pi$ より $\theta=\dfrac{5}{12}\pi$

3　(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2}=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2}=-\dfrac{3}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，$\mathrm{OD}\perp\mathrm{AB}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

$\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$

$(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(1-t)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$-\dfrac{3}{2}(1-t)-(1-t)\cdot2^2+t\cdot3^2-t\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0$　　よって $t=\dfrac{11}{32}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{21}{32}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{11}{32}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos60^\circ=3\times5\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos60^\circ=5\times2\times\dfrac{1}{2}=5$

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ より

$$(u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

$$u|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$　よって $4u-\dfrac{3}{2}v-5=0$ …… ①

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より

$$(u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

$$u\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+v|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$$　よって $-\dfrac{3}{2}u+9v-\dfrac{15}{2}=0$ …… ②

①，②より $u=\dfrac{5}{3}$，$v=\dfrac{10}{9}$　したがって $\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{10}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\times3^2-\left(-\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4\times9-\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{9\times\left(4-\frac{1}{4}\right)}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2=\left|\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{10}{9}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

$$=\frac{25}{9}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{100}{81}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$$+2\times\frac{50}{27}\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2\times\frac{10}{9}\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-2\times\frac{5}{3}\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$=\frac{100}{9}+\frac{100}{9}+25-\frac{50}{9}-\frac{150}{9}-\frac{50}{3}=\frac{25}{3}$$

よって $\mathrm{CE}=\sqrt{\dfrac{25}{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

したがって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{OAB}\times\mathrm{CE}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{15}}{4}\times\frac{5\sqrt{3}}{3}=\frac{5}{4}\sqrt{5}$$